4 (50点)

図のように，水平面上に質量 m の物体Aを置き，ばね定数 k のばねをつなぐ。ばねが自然長となる物体Aの位置を原点Oとし，水平方向に x 軸をとり，右向きを正の向きとする。原点Oから点P(位置 $x = l$)までの区間は摩擦のある領域であり，それ以外の領域は摩擦がないものとする。点Pの右側に質量 m の物体Bを置く。物体Aおよび物体BのOP間における静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を μ' とする。重力加速度を g として以下の問いに答えよ。ただし，物体AとBの大きさは無視できるものとする。

〔A〕 はじめに物体Aを原点Oに静止させておく。物体Bに原点Oに向かう速度を与え，摩擦のある領域を通過させたところ，物体BはAに衝突し，その後1つの物体ABとなって運動した。はじめに物体Bに与えた運動エネルギーを E とする。

(a) 衝突直前の物体Bの運動エネルギー E' を，E，μ'，m，g，l を用いて表せ。

(b) 衝突直後の物体ABの運動エネルギーを，E，μ'，m，g，l を用いて表せ。ただし物体BとAの衝突は瞬間的に起こり，その際，摩擦力の影響は無視できるものとする。

設問〔A〕において，物体Bにはじめに与える運動エネルギー E を変化させて，物体AとBの運動を調べる。ただし以下の問いでは，μ，μ'，l，k，m，g は $\mu = 2\mu'$ および $kl = 3\mu' mg$ を満たすものとする。

〔B〕 ある運動エネルギー E をはじめに物体Bに与えたところ，物体AとBは，衝突して一体となった後，再び原点Oに戻り，OP間のある位置 x で速度が0になった。

(c)　速度が0になる位置 x を，E，k，l を用いて表せ。

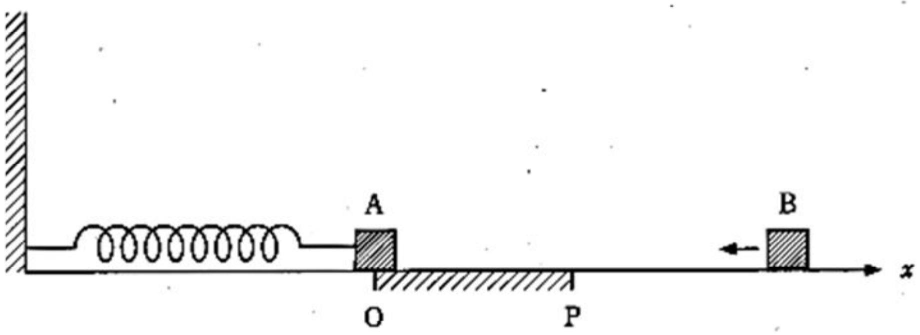
(d)　速度が0になった後，一体となった物体ABはどのような運動をするか，理由をつけて答えよ。

〔C〕　設問〔B〕で与えた運動エネルギーより大きい運動エネルギー E をはじめに物体Bに与えたところ，一体となった物体ABはPの右側に飛び出し，Pから再び摩擦のある領域に入った後，OP間のある位置 x で速度0となった。

(e)　位置 x を，E，k，l で表せ。

〔D〕　問い(e)の答 x を0とするような，物体Bに与える運動エネルギー E を E_1 とする。

(f)　物体A(一体となった後は物体AB)が最終的に静止する位置 x を，E の関数とみなし，$0 \leqq E \leqq E_1$ における関数のグラフの概略を描け。



〔A〕

(a)

$E' = E - \mu' mgl$

解説

物体 B にした仕事と運動エネルギーの関係より， $E' = E - \mu' mgl$　・・・(答)

(b)

$\dfrac{E - \mu' mgl}{2}$

解説

衝突の撃力(物体 A と物体 B の間の作用反作用の力)による力積は非常に大きいので，衝突の直前と直後では運動量が保存される。

衝突直前の物体 B の速さを v_{B} とすると， $E' = \dfrac{1}{2} m v_{\mathrm{B}}^2$　$\therefore v_{\mathrm{B}} = \sqrt{\dfrac{2E'}{m}}$

衝突直後の物体 AB の速度を v_{AB} とすると運動量保存則より， $2mv_{\mathrm{AB}} = m \cdot (-v_{\mathrm{B}})$

$\therefore v_{\mathrm{AB}} = -\dfrac{v_{\mathrm{B}}}{2}$

よって，衝突直後の物体 AB の運動エネルギーは,

$\dfrac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_{\mathrm{AB}}^2 = m \cdot \dfrac{v_{\mathrm{B}}^2}{4} = \dfrac{E'}{2} = \dfrac{E - \mu' mgl}{2}$　・・・(答)

〔B〕

(c)

$\dfrac{2}{3} l + \sqrt{\dfrac{l^2}{9} + \dfrac{E}{k}}$

解説

点 O（ばねの自然長の位置）で物体 AB が一体となった直後の力学的エネルギーは,

このときの運動エネルギーと等しいから， $\dfrac{E - \mu' mgl}{2}$ である。

これが OP 上の動摩擦力がする仕事 $-\mu' \cdot 2mgx$ を受け， $\dfrac{1}{2} kx^2$ となる。

よって，エネルギーと仕事の関係式は， $\dfrac{E - \mu' mgl}{2} + (-\mu' \cdot 2mgx) = \dfrac{1}{2} kx^2$

これと $kl = 3\mu' mg$ より， $\dfrac{E - \dfrac{kl^2}{3}}{2} - \dfrac{2kl}{3} x = \dfrac{1}{2} kx^2$　$\therefore 3kx^2 + 4klx - 3E + kl^2 = 0$

$x > 0$ より， $x = \dfrac{-2kl + \sqrt{4k^2 l^2 + 9kE - 3kl^2}}{3k} = -\dfrac{2}{3} l + \sqrt{\dfrac{l^2}{9} + \dfrac{E}{k}}$

(d)

静止し続ける。

理由

一旦静止してから再び動き出すためには，

弾性力の大きさが最大摩擦力の大きさより大きくなければならない。

最大摩擦力の大きさは $\mu\cdot 2mg = 2\mu'\cdot 2mg = 4\mu' mg$ であり，

これとつり合いの弾性力の大きさは $kl = 3\mu' mg$ より， $4\mu' mg = 4\cdot\dfrac{kl}{3} = k\cdot\dfrac{4}{3}l$

これより $x > \dfrac{4}{3}l$ であれば再び動き出す。ところが $-\dfrac{2}{3}l + \sqrt{\dfrac{l^2}{9} + \dfrac{E}{k}} < \mathrm{OP} = l < \dfrac{4}{3}l$

つまり OP 上で一旦静止してしまうと再び動き出すことはない。

〔**C**〕

(e)

$\dfrac{2}{3}l - \sqrt{\dfrac{E}{k} - \dfrac{23}{9}l^2}$

解説

物体 AB は一体のままだから，(c)と同様に考えて，仕事とエネルギーの関係式は，

$$\frac{E - \mu' mgl}{2} + \left(-\mu'\cdot 2mgl\right) + \left\{-\mu'\cdot 2mg(l - x)\right\} = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \therefore E - 9\mu' mgl + 4\mu' mgx = kx^2$$

これと $kl = 3\mu' mg$ より， $E - \dfrac{9}{3}kl^2 + \dfrac{4}{3}klx = kx^2 \qquad \therefore 3kx^2 - 4klx - 3E + 9kl^2 = 0$

$$\therefore x = \frac{2kl \pm \sqrt{4k^2l^2 + 9kE - 27k^2l^2}}{3k} = \frac{2}{3}l \pm \sqrt{\frac{E}{k} - \frac{23}{9}l^2}$$

ここで，物体 AB が P から O に向かって運動しているときの加速度を a とすると，

その運動方程式は， $ma = -kx + \mu'\cdot 2mg \qquad \therefore ma = -k\left(x - \dfrac{2\mu' mg}{k}\right)$

これと $kl = 3\mu' mg$ より， $ma = -k\left(x - \dfrac{2}{3}l\right) \qquad \therefore a = -\dfrac{k}{m}\left(x - \dfrac{2}{3}l\right)$

これより，物体 AB が P から O に向かう速度（左向きの速さ）は，

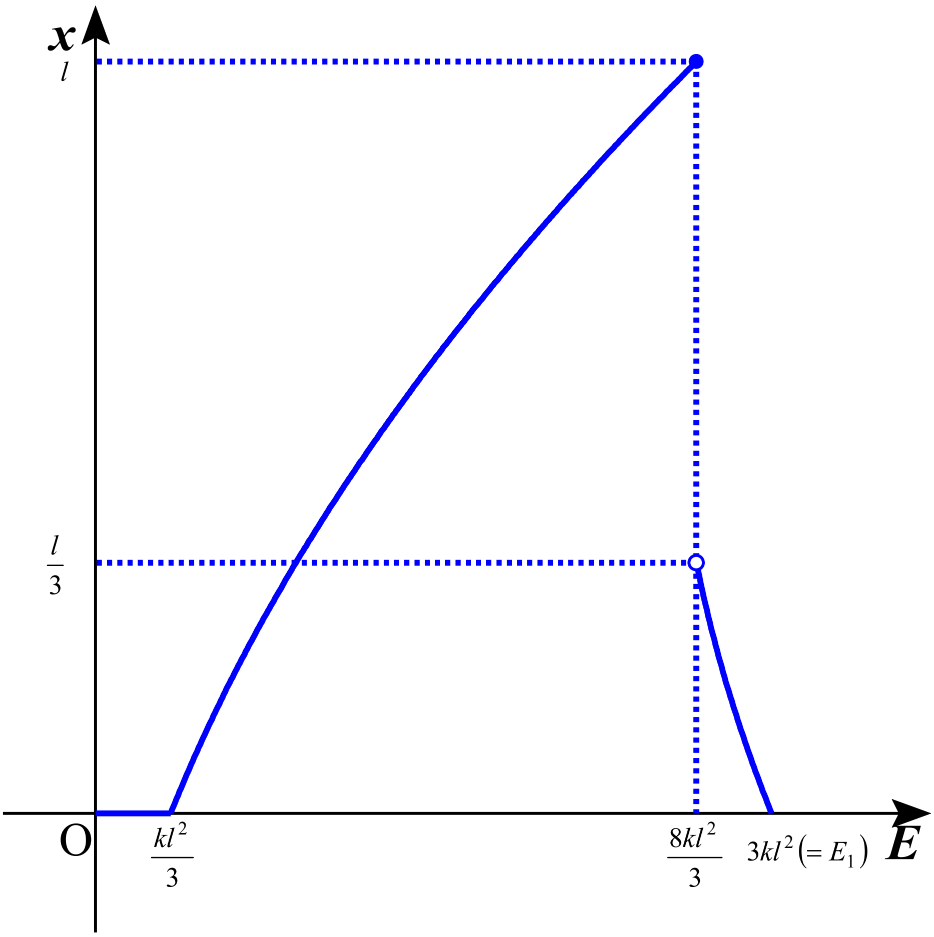
$\dfrac{2}{3}l < x \leq l$ のとき大きくなっていき， $x = \dfrac{2}{3}l$ で最大になり， $0 \leq x < l$ で小さくなる。

したがって，物体 AB が静止する位置は $0 \leq x < \dfrac{2}{3}l$ である。

よって， $x = \dfrac{2}{3}l - \sqrt{\dfrac{E}{k} - \dfrac{23}{9}l^2}$

〔**D**〕

(f)



解説

O から P への移動中に止まる場合

曲線の式：$x=f(E)=-\frac{2}{3}l+\sqrt{\frac{l^2}{9}+\frac{E}{k}}$

定義域：$0\leq -\frac{2}{3}l+\sqrt{\frac{l^2}{9}+\frac{E}{k}}\leq l \quad \therefore \frac{1}{3}kl^2\leq E\leq \frac{8}{3}kl^2$

また，$0\leq E<\frac{1}{3}kl^2$ のとき，O で静止する。

P から O への移動中に止まる場合

曲線の式：$x=g(E)=\frac{2}{3}l-\sqrt{\frac{E}{k}-\frac{23}{9}l^2}$

定義域：$0\leq \frac{2}{3}l-\sqrt{\frac{E}{k}-\frac{23}{9}l^2}\leq l$ および $\frac{8}{3}kl^2<E$ より，$\frac{8}{3}kl^2<E\leq 3kl^2$